【力学から振り返る物理の本質】〜 ２つの保存則とその成立条件

今回の体験授業では，物理の力学で頻繁に利用する「力学的ネルギー保存則」と「運動量保存則」に関連した内容を扱います。

しかし，その前に少し肩慣らしをしておきましょう。次の２つの問題を解いてみてください。

準備 1　ある物体を地面から鉛直上向きに投げ上げる。物体を投げ上げた瞬間を時刻 $t=0$ として，物体が地面に戻るまでの間の任意の時刻 t での速度 V を考える。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

(1) 図 1 に示すように，物体に与えた初速を v_0 とする。

　(a) 図 1 において，鉛直上向きを正としたときの速度 V を求めよ。

　(b) 図 1 において，鉛直下向きを正としたときの速度 V を求めよ。

(2) 図 2 に示すように，物体に与えた初速度を V_0 とする。

　(c) 図 2 において，鉛直上向きを正としたときの速度 V を求めよ。

　(d) 図 2 において，鉛直下向きを正としたときの速度 V を求めよ。

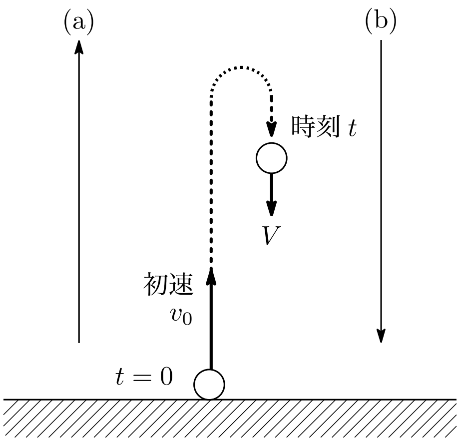


図 1

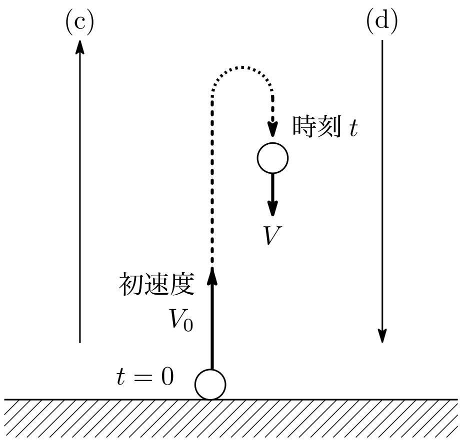
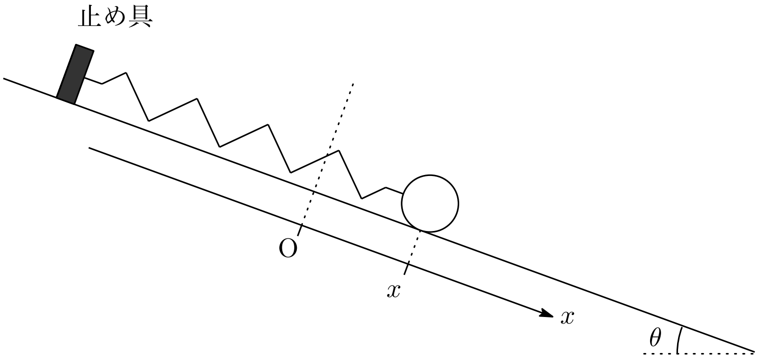


図 2

準備 2 下図のように，水平面に対して角度 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のなめらかな斜面がある。この斜面の上方に止め具を設置し，そこに ばね定数 k の軽いばねの一端を固定する。ばねの他端には質量 m の小球を取り付ける。また，ばねが自然長の状態での小球の位置を原点 O とし，斜面平行下向きに x 軸をとる。

なお，重力加速度の大きさを g とし，ばねは斜面の最大傾斜の方向にのみ伸縮する。



(1) 小球が斜面上で静止し続ける位置の x 座標 d_0 を求めよ。

小球が静止している状態から，手で支え上げながらゆっくりと自然長の位置まで戻した。

(2) この間に ばねの弾性力がした仕事 W_k を，計算過程あるいは求め方のポイントを簡潔に添えて答えよ。

(3) この間に手の力がした仕事 W_h を求めよ。

自然長で静止させた状態から手の支えを静かに放すと，小球は斜面を下降し，やがて位置 $x=x_{\mathrm{b}}$ で一旦静止した。

(4) 任意の位置 x $(0\leqq x\leqq x_{\mathrm{b}})$ において小球の速さを v とする。このとき，次の式の空欄にあてはまる数式を記せ。

$$\frac{1}{2}mv^2-0=\boxed{}$$

(5) x_{b} を求めよ。

では，本題の「エネルギー保存則」と「運動量保存則」の内容に入りましょう。

《エネルギー保存則への道のり》

◆ 保存力とは？

物体を移動させるとき，経路に依らず **始点と終点のみで移動に要する仕事が決まる力**

⟵ **大きさおよび向きが「位置のみで決まる」力** と考えてもよい。

***cf.*『位置エネルギー』の定義**

ある保存力に逆らって，力がつり合うように加えた外力が基準点から任意の点までにした仕事 □

◆ 仕事とエネルギーの関係（または，エネルギーの原理）

ここでは，やや広義に解釈して２通りの表現を与えます。

> **【仕事とエネルギーの関係・Ver.1】**
> 運動エネルギーの変化量は，すべての力からされた仕事の和に等しい。

$\Longleftrightarrow$

> **【仕事とエネルギーの関係・Ver.2】**
> 力学的エネルギーの変化量は，非保存力からされた仕事の和に等しい。

なお，この関係式は 物体ごとに立式されるべきものであり，途中で撃力を受けない場合に限り成り立ちます。

◆ 力学的エネルギー保存則

上の関係式から，考えている物体系で考えるときに，**非保存力による仕事の和がキャンセルする** 場合に，物体系に対して『力学的エネルギー保存則』が成り立つことが分かります。

> **【エネルギー保存則の成立条件】**
> **ある物体系に対して，非保存力によってなされる仕事の和がゼロになる。**

《運動量保存則への道のり》

◆ 外力か，内力か？

任意の物体系において，

- **内力**： 系に含まれる物体から及ぼされる力
- **外力**： 系に含まれない物体から及ぼされる力

ここで, 注意するべきは, まったく同じ状況の同じ力であっても, 物体系の取り方によって，内力にも外力にもなることです。

◆ 運動量変化と力積の関係

運動量の単位〔kg · m/s〕と，力積の単位〔N · s〕はまったく同じものなので，ひとつの式の中にこの２種類の物理量が混在していることは問題ありません。この関係式は，運動方程式からごく一般的に導くことができますが，ここでは割愛します。

> **【運動量変化と力積の関係】**
> ある物体の運動量の変化は，すべての力から受けた力積の和に等しい。

この関係式も 物体ごとに立式されるべきもので，どんな状況でも成り立ちます。

◆ 運動量保存則

運動量保存則は，エネルギー保存則とは異なり，単一物体では成り立たず，必ず複数物体の系で考えないといけません。このとき，**物体系が受ける外力による力積の和がキャンセルする** 場合に，その物体系に対して『運動量保存則』が成り立つことになります。

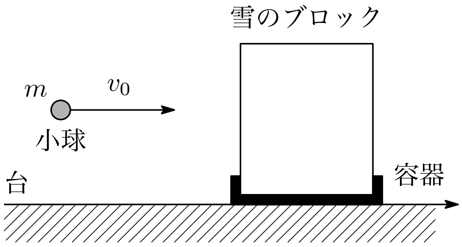
> **【運動量保存則の成立条件】**
> **ある物体系に対して，外力による力積の和がゼロになる。**
> ⟵ あるいは，外力による力積が無視できる — 撃力を瞬間的に受ける — とき，近似的に 保存則が成り立つ。

演習 1

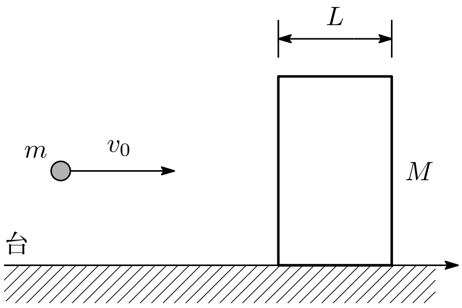
図１のように，雪を固めてつくった直方体のブロックを高さの低い長方形の容器に入れて，水平な台の上に置いた。雪のブロックは容器にきっちりと入っており，容器の中を滑らない状態になっている。

この雪のブロックに向けて，水平方向から質量 m の小球を速度 v_0（水平右向きを正とする）で，ブロックの側面に垂直に撃ち込んだところ，雪のブロックは台に対して全く動かず，小球は速度 v_0 の向きに深さ L まで入り込んで静止した。このとき雪のブロックは変形も壊れもしなかった。

雪の中で小球にはたらく抵抗力は，小球が静止するまでの間は常に一定であるとし，以下の問いに答えよ。



【図１】



【図２】

(1) 雪のブロックが小球に与えた力積の向きと大きさを求めよ。ただし，水平右向きを正とする。

(2) 雪のブロック中で小球の受ける抵抗力の大きさを求めよ。

(3) 小球が雪のブロック中で静止するまでの時間は，ブロックに入ってからいくらか。

次に，図２のように，厚さ L の雪のブロックを用意し，容器に入れずに直接水平な台の上に置いた。そして，上と同じように，質量 m の小球を水平方向から速度 v_0 でブロックの側面の中央に垂直に撃ち込んだ。

雪の中で小球にはたらく抵抗力は，図１の場合と同じ一定値をとる。雪のブロックの質量は M で，雪のブロックと台との摩擦力は無視できるほど小さいとする。

(4) 小球がブロック中に静止した後の，台に対するブロックの速度はいくらか。

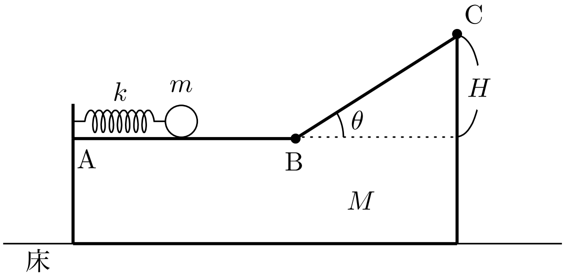
(5) 小球が雪のブロックに入り込んだ深さはいくらか。

(6) 小球が雪のブロック中に静止するまでの間に，ブロックは台の上をどれだけの距離を移動するか。

(7) 小球が雪のブロックに入り込んでから，ブロック中に静止するまでの時間はいくらか。

演習 2

十分に広く滑らかで水平な床の上に，質量 M の台が置かれている。台のどの面も滑らかであるとする。右図のように，台の上面 AB 間は水平であり，BC 間は水平に対する角度が θ で，高低差が H の斜面である。また，台の左端 A に，バネ定数が k で質量の無視できるバネが取りつけられている。ここで，質量 m の小球を自然長のバネの右端に押しつけて L だけバネを縮めて小球を静かに放した。重力加速度の大きさを g として，小球や台のその後の運動について，以下の問いに答えよ。ただし，空気の抵抗は無視できるものとし，解答には m, M, θ, H, k, L, g の中から必要なものを選んで用いよ。水平方向の速度については，図の右向きを正とする。



台が床に固定されている場合について，以下の問いに答えよ。

(1) 点 B を通過する直前の小球の床に対する速度 v_0 を求めよ。

(2) 小球が点 C から台を離れるために必要な L の条件を求めよ。

台が床の上を自由に動くことができる場合について，以下の問いに答えよ。ただし，小球を放したとき，台は床に対して静止しているものとし，小球が台から離れることはないと考えてよい。

(3) 小球が点 B を通過する直前の，床に対する小球の速度 v_{B} と台の速度 V_{B} を求めよ。

(4) 小球が最高点の高さに達したときの床に対する小球の水平方向の速度 v を求めよ。

(5) ばねの縮み L を (2) の条件の下限の値にして離したとき，小球の最高点の AB 面から測った高さ h を求めよ。 (兵庫県立大・改題)