岡本塾＆理数塾・物理体験授業 01　解答解説

演習 1　（大阪大）

fig 1a

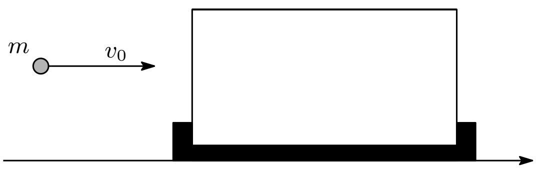
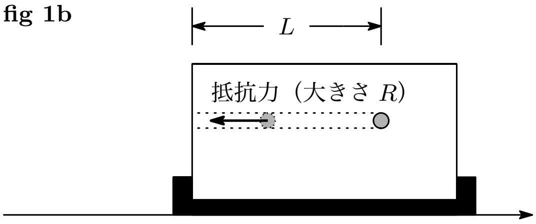


fig 1b



…… 雪のブロックが固定されている場合は，**小球のみで「仕事とエネルギーの関係」および「運動量と力積の関係」**を用いる。

⟶『時間』を扱える公式＆関係式は，次のようになる。

◆ 等加速度運動の公式

◆ 単振動や等速円運動の周期

◆ **運動量と力積の関係**

⟵ 使う機会は非常に少ないが…

…… 雪のブロックが台上を自由に動ける場合は，**小球と雪のブロックの系で「仕事とエネルギーの関係」および「運動量保存則」**を用いる。

⟶ **「力学的エネルギー保存則」は，小球と雪のブロックの系で考えても成り立たない** ことに注意！！

…… 「仕事とエネルギーの関係」をそれぞれ立式！

(1)　雪のブロックが小球に与えた力積を I とすると，小球に対する運動量と力積の関係より，

$$I = 0 - m\,v_0 = -m\,v_0 \quad (<0!!)$$

となる。よって，力積の向きは **負の向き** であり，その大きさは $|\,I\,| =$ $\boldsymbol{mv_0}$

(2)　雪のブロックから小球が受ける抵抗力の大きさを R とする。題意より，抵抗力の大きさは常に一定であることから，小球についての仕事とエネルギーの関係より，

$$0 - \frac{1}{2}m\,{v_0}^2 = -R\,L \quad \Longleftrightarrow \quad R = \boldsymbol{\frac{m{v_0}^2}{2L}}$$

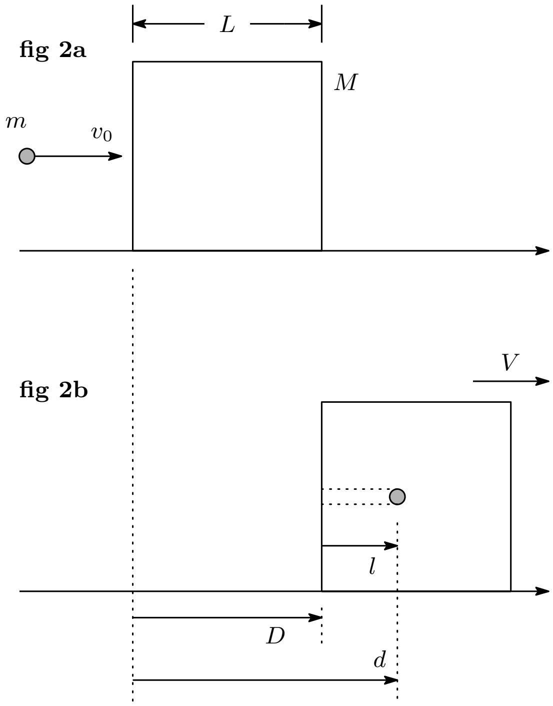
【別解】；

もちろん，運動方程式から雪のブロック中での小球の加速度を R を用いて表しておいて，「変位が $+L$ となる」ことを使って，等加速度運動の $\boldsymbol{v^2 - {v_0}^2}$ **の公式** から R を求めることもできる。

また，(3) においても，同様に，等加速度運動の公式の「変位の式」から時間 τ を求めることも可能である。

(3)　小球が雪のブロック中で静止するまでの時間を τ とすると，雪のブロックが小球に与えた力積に注目して，

$$I = -R\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \tau = -\frac{I}{R} = \boldsymbol{\frac{2L}{v_0}}$$



…… (4) 以降では，小球と雪のブロックの系において，

◆台からの摩擦なし　$\Longrightarrow$　運動量保存則が成立

◆小球と雪の間に抵抗力あり

$\Longrightarrow$　エネルギー保存則は不成立

(4)　小球と雪のブロックの系において，水平方向には外力が作用しないので運動量保存則が成り立つ。よって，小球がブロック中で静止したときの台に対する速度を V とすると，

$$m v_0 = (m+M)V \iff V = \underline{\boldsymbol{\frac{m}{m+M} v_0}}$$

(5)　fig 2b に示したように，台に対する小球およびブロックの変位をそれぞれ d，D とし，ブロックに対する小球の変位（“ブロックに入り込んだ深さ”でもある）を l とする。このとき，小球およびブロックに対して，それぞれ仕事とエネルギーの関係を立式すると，

$$\text{小球；}\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -Rd \quad \cdots\cdots ① \ , \quad \text{ブロック；}\frac{1}{2}MV^2 - 0 = +RD \quad \cdots\cdots ②$$

となる。これらを辺々加えて，

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \underline{-R(d-D)}$$

$\longleftarrow$ 右辺がゼロにはならず **力学的エネルギー保存則が成り立たない** こと分かる。その理由が，**『小球とブロックの間で作用する抵抗力からされる仕事がキャンセルしない』**ということも，この式から明らかであろう！

ここに，(2) の R および (4) の V を代入し，$d-D=l$ であることを用いると，

$$\frac{m^2{v_0}^2}{2(m+M)} - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\frac{m{v_0}^2}{2L}l \iff l = \underline{\boldsymbol{\frac{M}{m+M}L}} \qquad \text{を得る。}$$

(6)　② より，

$$D = \frac{MV^2}{R} = \underline{\boldsymbol{\frac{mM}{(m+M)^2}L}}$$

(7)　小球がブロック中で静止するまでの時間を τ' とすると，ブロックに対する 運動量と力積の関係より，

$$MV - 0 = +R\tau' \iff \tau' = \frac{MV}{R} = \underline{\boldsymbol{\frac{2ML}{(m+M)v_0}}}$$

演習 2　**（兵庫県立大・改題）**

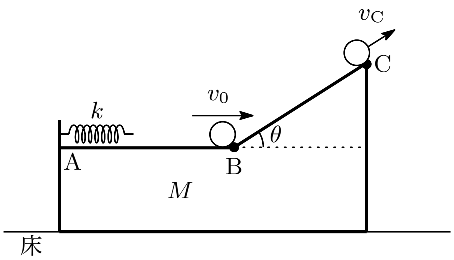


fig 1

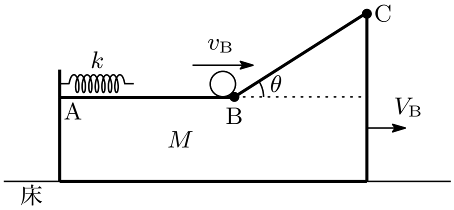


fig 2

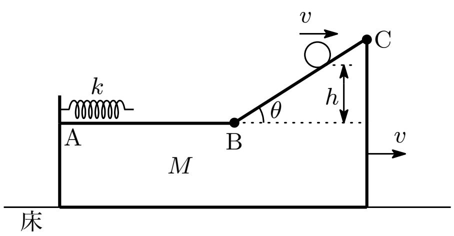


fig 3

…… 台が固定されている場合には，台の面と小球の間に摩擦がないので，**（小球のみで）エネルギー保存則が成り立つ**。

…… 台が床の上を動くとき，小球と台（および ばね）を併せた系には，**水平方向に外力がゼロ**！！

$\longrightarrow$水平方向に対して『運動量保存則』が成り立つが…，『エネルギー保存則』は成り立つか？

(1) 最初，バネに蓄えられていたエネルギーが，すべて小球の運動エネルギーに変わったので，fig 1 におけるエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_0}^2 = \frac{1}{2}\,k\,L^2 \quad \Longleftrightarrow \quad v_0 = \underline{\boldsymbol{L\sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

(2) fig 1 のように，点 C での小球の速さを v_C とする。題意をみたすには，**点 C における小球の運動エネルギーが正値であればよい**。したがって，B 点を位置エネルギーの基準として，エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_C}^2 + mg\,H = \frac{1}{2}\,k\,L^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\,m\,{v_C}^2 = \frac{1}{2}\,k\,L^2 - mg\,H > 0 \qquad \underline{\boldsymbol{L > \sqrt{\frac{2\,mg\,H}{k}}}}$$

(3) 台が床の上を摩擦を受けずに運動できるとき，台と小球の系に対して水平方向の外力はゼロより，水平方向に関しては運動量保存則が成り立つ。また，台のどの面にも摩擦ははたらかず，小球・台は一切 “衝突” していないのでエネルギー保存則も同時に成立する。よって，fig 2 より，

$$0 = m\,v_B + M\,V_B \quad \cdots\cdots \text{①} \qquad \frac{1}{2}\,k\,L^2 = \frac{1}{2}\,m\,{v_B}^2 + \frac{1}{2}\,M\,{V_B}^2 \quad \cdots\cdots \text{②}$$

① より，$V_B = -\dfrac{m}{M}\,v_B$ であり，これを ② に代入すると，

$$\frac{1}{2}\,m\,{v_B}^2 + \frac{1}{2}\,M\left(-\frac{m}{M}\,v_B\right)^2 = \frac{1}{2}\,k\,L^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{m+M}{M}\cdot\frac{1}{2}\,m\,{v_B}^2 = \frac{1}{2}\,k\,L^2 \quad \Longleftrightarrow \quad {v_B}^2 = \frac{M}{m\,(m+M)}\cdot k\,L^2$$

ここで，小球はバネから右向きの復元力を受けて運動したので，$v_B > 0$ である。このことに注意して，v_B，V_B をそれぞれ求めると，

$$\therefore v_B = \underline{\boldsymbol{L\sqrt{\frac{kM}{m\,(m+M)}}}} \quad , \quad V_B = \underline{\boldsymbol{-L\sqrt{\frac{km}{M\,(m+M)}}}} \quad (<0)$$

(4) ……“小球が最高点に達する” $\iff$ 台から見て，小球が静止！

$\iff$ 床から見て，台と小球の速度が一致！！！

小球が最高点に達した瞬間，小球と台の床に対する速度が v で一致するので，水平方向の運動量保存則より，

$$0=(m+M)v \iff v=\underline{\boldsymbol{0}}$$

(5) fig 3 において，台と小球の系においてエネルギー保存則が成り立つ。(2) および (4) の結果も考慮して，

$$\frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{2mgH}{k}}\right)^2=mgh \iff h=\underline{\boldsymbol{H}}$$